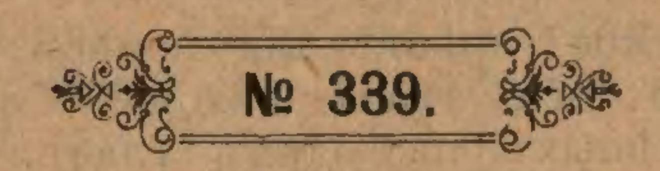
XXIX Сем. № 3.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

15 Февраля



№ 339.

1903 г.

О новѣйшихъ приложеніяхъ стереоскопіи.

M. Tauber'а, cand. math. et astr.
Praktikant an der Sternwarte zu Jena. *)

Всѣмъ извѣстно, что при зрѣніи однимъ глазомъ мы не получаемъ представленія о положеніи предметовъ въ пространствѣ. Если смотрѣть на палецъ однимъ глазомъ, то намъ палецъ со всѣми предметами позади него кажется находящимся въ одной плоскости; наводя карандашъ на палецъ или одну булавку на другую, мы, вообще, промахнемся; карандашъ пройдетъ мимо пальца, и булавки не сойдутся. При зрѣніи однимъ глазомъ мы только тогда дѣйствительно убѣждаемся, что, напр., предметъ А ближе къ намъ, чѣмъ предметъ В, если А покрываетъ В. Такъ, если вершина какой-нибудь горы исчезаетъ въ облакахъ, то мы выводимъ заключеніе, что облака ниже вершины.

Только при зрѣніи обоими глазами мы получаемъ стереоскопическій эффектъ. Нѣсколько различныя изображенія одного и того же предмета на обѣихъ сѣтчатыхъ оболочкахъ передаются черезъ посредство глазныхъ нервовъ нашему мозгу, гдѣ они сливаются въ одно общее представленіе — въ представленіе тѣлесности предмета.

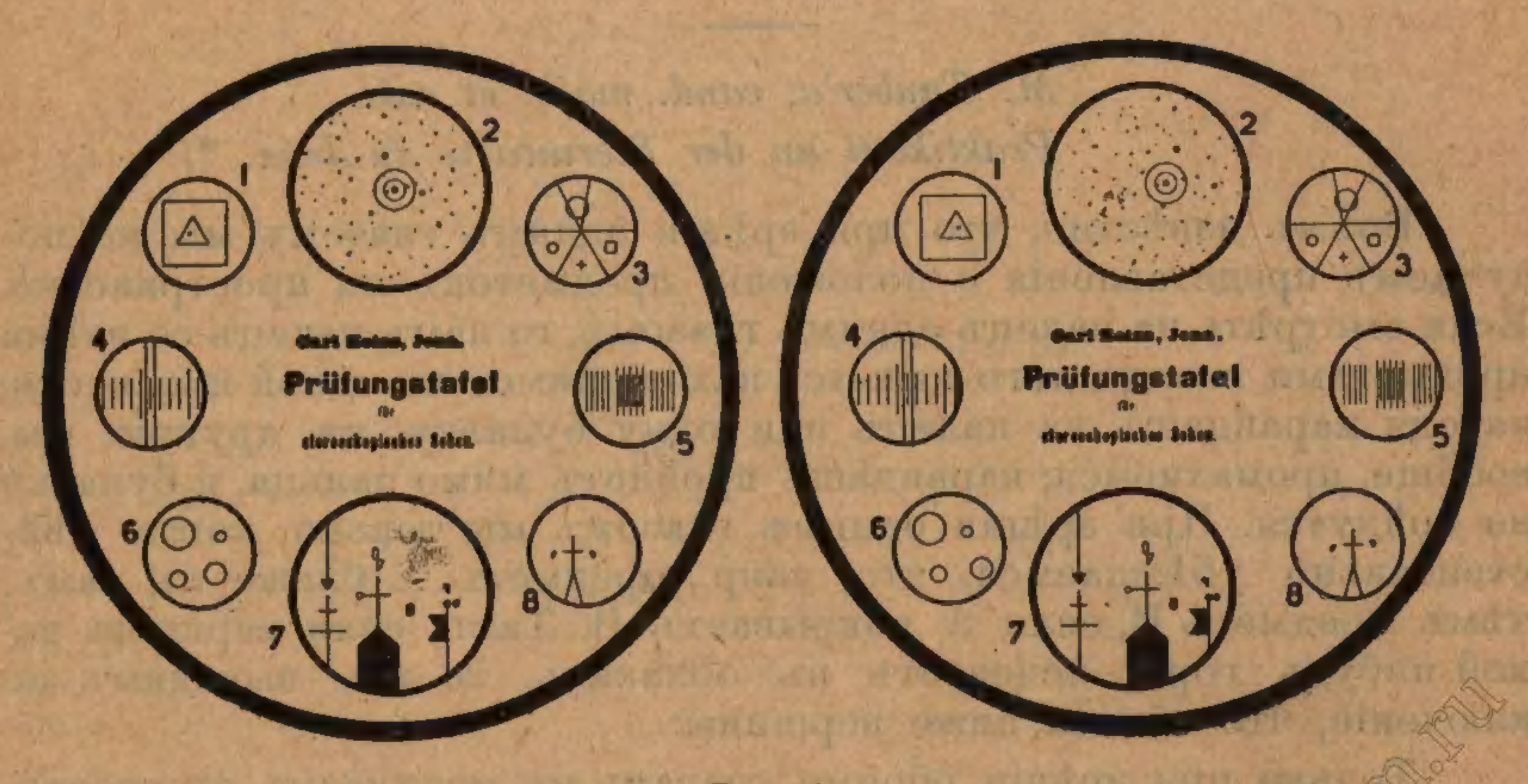
*) Статья любезно прислана намъ авторомъ на *русскомъ* языкѣ.

Если, поэтому, сдѣлать два такихъ рисунка, чтобы одинъ представлялъ изображенiе какого-нибудь предмета въ правомъ глазу, а другой—изображенiе того же предмета въ лѣвомъ глазу, и устроить такъ, чтобы каждый глазъ видѣлъ соотвѣтствующiй ему рисунокъ, то мы получимъ впечатлѣнiе, будто мы видимъ передъ собою рельефный предметъ.

Получая при стереоскопическомъ зрѣнiи представленiе предметовъ въ пространствѣ, мы въ то же время прiобрѣтаемъ способность различать разстоянiя и измѣрять ихъ глазомъ.

Стереоскопическое зрѣнiе въ полной степени доступно только тому, у кого оба глаза находятся въ нормальномъ состоянiи. Помимо слѣпыхъ на одинъ глазъ, для которыхъ, конечно, стереоскопическiе эффекты совершенно исключены, есть много людей, которые, сами этого не сознавая, употребляютъ при обыкновенномъ зрѣнiи только одинъ глазъ; сюда относятся люди, которые, напр., много микроскопируютъ; такiя лица также лишены стереоскопическихъ эффектовъ и для полученiя таковыхъ они должны свои глаза постепенно прiучать къ стереоскопическому зрѣнiю.

Для изслѣдованiя глазъ относительно ихъ способности стереоскопически видѣть и для прiученiя ихъ къ стереоскопическому зрѣнiю, Dr. Pulfrich'омъ на оптическомъ заводѣ „Carl Zeiss" въ Iенѣ придумана особая таблица. Эта таблица (черт. 1),



Фиг. 1.

Пробная таблица стереоскопическаго зрѣнiя.

имѣющая, вообще, громадное дидактическое значенiе, состоитъ, помимо надписи, изъ восьми группъ разныхъ фигуръ.

Вложенная въ стереоскопъ, она даетъ намъ возможность познакомиться со всевозможными примѣненiями стереоскопiи.

Въ группѣ I мы видимъ фигуры въ слѣдующемъ порядкѣ:
на первомъ планѣ—кругъ
позади него—квадратъ,
затѣмъ треугольникъ,
и на заднемъ планѣ—точку.

Въ группѣ II, представляющей собою подражаніе двумъ фотографическимъ снимкамъ съ Сатурна, сдѣланнымъ Вольфомъ въ Гейдельбергѣ 9 и 10 іюня 1899 года, мы видимъ въ стереоскопѣ планету къ намъ ближе, чѣмъ его спутниковъ; этихъ ближе, чѣмъ звѣзды, и послѣднія мы видимъ не въ одной плоскости, но въ пространствѣ [1]).

Въ группѣ III мы видимъ:
на первомъ планѣ—кругъ въ верхней половинѣ,
затѣмъ—квадратъ,
позади него—крестикъ,
потомъ—внѣшній кругъ,
на заднемъ планѣ—кругъ въ нижней половинѣ.

Група IV показываетъ примѣненіе стереоскопіи для сравненія масштабовъ. Масштабъ налѣво безъ ошибокъ, масштабъ направо съ ошибками. Ошибки для отдѣльныхъ чертъ суть:

Черта .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ошибка	±0	±0	+0,065	+0,041	+0,024	+0,073	±0	+0,024	+0,041	−0,057	+0,032

При стереоскопическомъ сравненіи обоихъ масштабовъ эти ошибки тотчасъ же обнаруживаются. Черты (1) и (2) находятся на одинаковомъ разстояніи, (3) отступаетъ назадъ, (4) выступаетъ впередъ, (5) выступаетъ еще больше впередъ, (6) отступаетъ назадъ и т. д.

Въ надписи мы видимъ:
на первомъ планѣ
Prüfungstafel für stereosk. Sehen
и на заднемъ планѣ
Carl Zeiss, Jena.

Если нѣкоторыя буквы нѣсколько передвинуты, то мы замѣчаемъ въ стереоскопъ, что однѣ буквы отступаютъ назадъ, другія выступаютъ впередъ и т. д,

На этомъ свойствѣ стереоскопіи основано стереоскопическое сравненіе бумажныхъ денегъ и всякихъ другихъ документовъ для изслѣдованія ихъ неподдѣльности. Фальсификатъ покажетъ

[1]) Круги вокругъ планеты не имѣютъ здѣсь ничего общаго съ кольцами Сатурна.

намъ всегда, въ сравненіи съ настоящимъ экземпляромъ, нѣкоторыя выступающія изъ плоскости буквы или другія неточности, такъ какъ абсолютно-точная репродукція всѣхъ разстояній при поддѣлкахъ лежитъ внѣ всякой возможности.

Въ группѣ (*5*) мы видимъ:

на первомъ планѣ—5 чертъ направо,
затѣмъ—9 чертъ въ серединѣ,
потомъ—5 чертъ налѣво;
на заднемъ планѣ—кругъ.

Въ группѣ (*6*):

на первомъ планѣ: большой кругъ въ нижней части,
затѣмъ—меньшій кругъ въ той же части,
потомъ—большой кругъ въ верхней части,
далѣе—внѣшній кругъ;
на заднемъ планѣ—самый маленькій кругъ.

Въ группѣ (*7*) фигуры слѣдуютъ въ слѣдующемъ порядкѣ:

a) прямоугольникъ,
b) треугольникъ — надъ простымъ крестомъ;
c) башня съ крестомъ и кольцомъ на крестѣ,
d) черный прямоугольникъ,
e) флагъ,
f) черный кругъ,
g) черный треугольникъ,
h) двойной крестъ,
i) внѣшній кругъ.

Въ группѣ (*8*):

впереди—башня и оба треугольника,
позади—кольцо.

Теле-стереоскопъ и рельефъ-телескопъ.

Наша способность получать невооруженными глазами стереоскопическія впечатлѣнія простирается только до извѣстнаго предѣла. Только до этого предѣла мы въ состояніи различать разстоянія и измѣрять ихъ глазомъ; внѣ его намъ всѣ предметы кажутся находящимися въ одной плоскости.

Пусть будутъ O и O′ мѣста глазъ и M пусть будетъ предѣльный предметъ, который мы еще безъ напряженія глазъ въ состояніи рельефно видѣть.

Обозначивъ разстояніе глазъ черезъ a, разстояніе предмета отъ послѣднихъ черезъ D и уголъ глазныхъ осей OM и OM′ буквой α, имѣемъ:

$$D = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

D называется радіусомъ „*стереоскопическаго поля*“, *a* „*базисомъ стереоскопическаго зрѣнія*“ и α „*паралактическимъ угломъ*“.

Нашли, что предѣлъ чувствительности при среднемъ разстояніи глазъ въ 65 mm. соотвѣтствуетъ углу $\alpha = 30''$, т. е. радіусъ „стереоскопическаго поля“, внутри котораго мы въ состояніи получать представленіе предметовъ въ пространствѣ и оцѣнивать „глазомъ“ ихъ разстоянія, равенъ приблизительно 450 метрамъ.

По Гельмгольцу $\alpha = 1'$, Pulfrich же нашелъ, что у многихъ лицъ онъ доходитъ даже до $10''$.

Радіусъ „стереоскопическаго поля“ находится въ прямой зависимости отъ „базиса стереоскопичего зрѣнія“, т. е. отъ разстоянія глазъ.

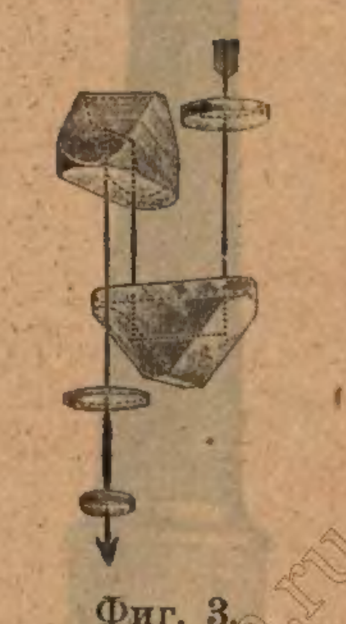
Увеличивая базисъ стереоскопическаго зрѣнія, мы расширяемъ, вмѣстѣ съ тѣмъ, стереоскопическое поле, и намъ предметы на разстояніи больше 450 метровъ не кажутся болѣе находящимися въ одной плоскости съ безконечно-удаленными предметами.

Гельмгольцъ былъ первымъ, который своимъ теле-стереоскопомъ далъ методъ для искусственнаго расширенія разстоянія глазъ. Однако, построенный по его указаніямъ теле-стереоскопъ не получилъ распространенія.

Въ началѣ 90-ыхъ годовъ фирма Zeiss начала заниматься выдѣлкой полевыхъ биноклей съ увеличенной пластинкой. Фигура (2) представляетъ собою первый изъ подобныхъ биноклей, выпущенныхъ фирмой. Система призмъ по Порро, поставленная на пути лучей (черт. 3), даетъ четыре полныхъ внутреннихъ от-



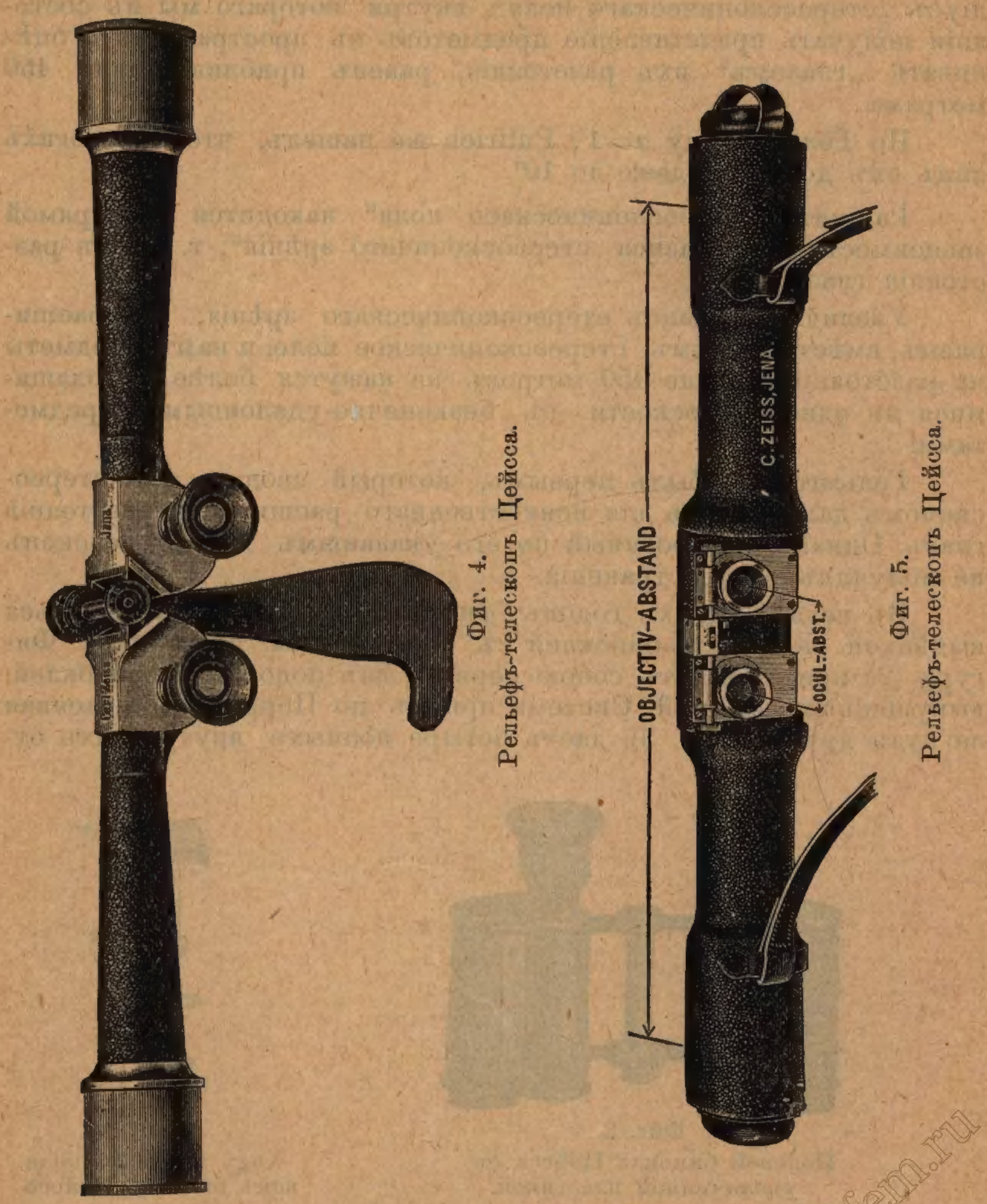
Фиг. 2.
Полевой бинокль Цейсса съ увеличенной пластикой.



Фиг. 3.
Ходъ лучей въ полевомъ биноклѣ Цейсса.

раженія; фокусное разстояніе объективовъ, поэтому, увеличивается,—слѣдовательно, и увеличеніе становится больше. Разстояніе объективовъ въ $1^3/_4$ раза больше разстоянія окуляровъ. Стереоскопическій эффектъ поэтому почти вдвое больше, чѣмъ у обыкновенныхъ биноклей. Специфическая пластинка бинокля, какъ выражаются, равна здѣсь $1^3/_4$.

Еще болѣе сильные стереоскопическiе эффекты достигаются посредствомъ, такъ называемыхъ, *рельефъ-телескоповъ* (фиг. 4 и 5). Они, помимо бо́льшаго разстоянiя объективовъ, отличаются отъ полевыхъ биноклей еще тѣмъ, что призма, дающая первое полное

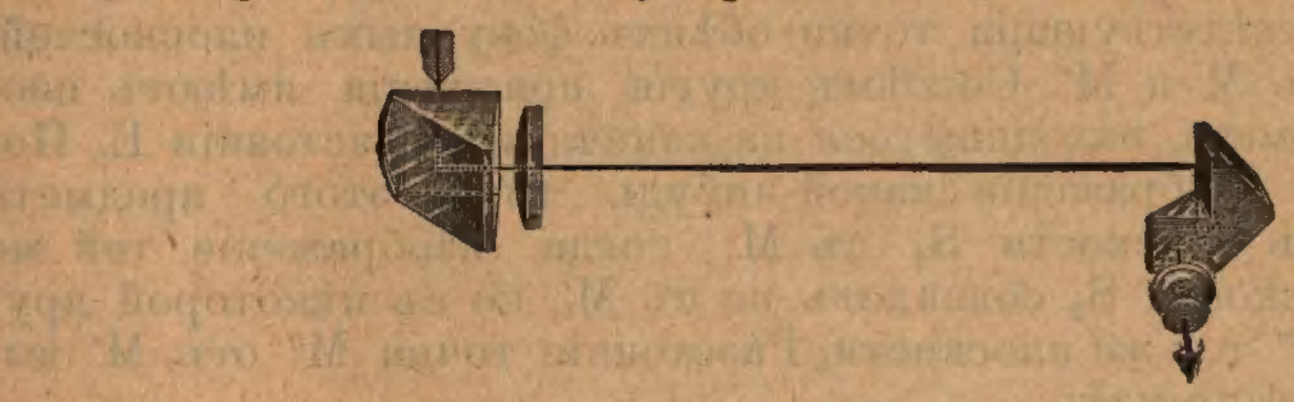


Фиг. 4. Рельефъ-телескопъ Цейсса.

Фиг. 5. Рельефъ-телескопъ Цейсса.

внутреннее отраженiе, находится передъ объективомъ. На чертежѣ (6) обозначенъ ходъ лучей въ такомъ телескопѣ. Лучи падаютъ на призмы P_1 и P_2, претерпѣваютъ здѣсь полное внутреннее отраженiе и идутъ черезъ объективы O_1 и O_2 въ трубы, гдѣ они, послѣ трехъ полныхъ внутреннихъ отраженiй, проходятъ черезъ систему призмъ по Порро, и черезъ окуляры направляются затѣмъ къ глазамъ,

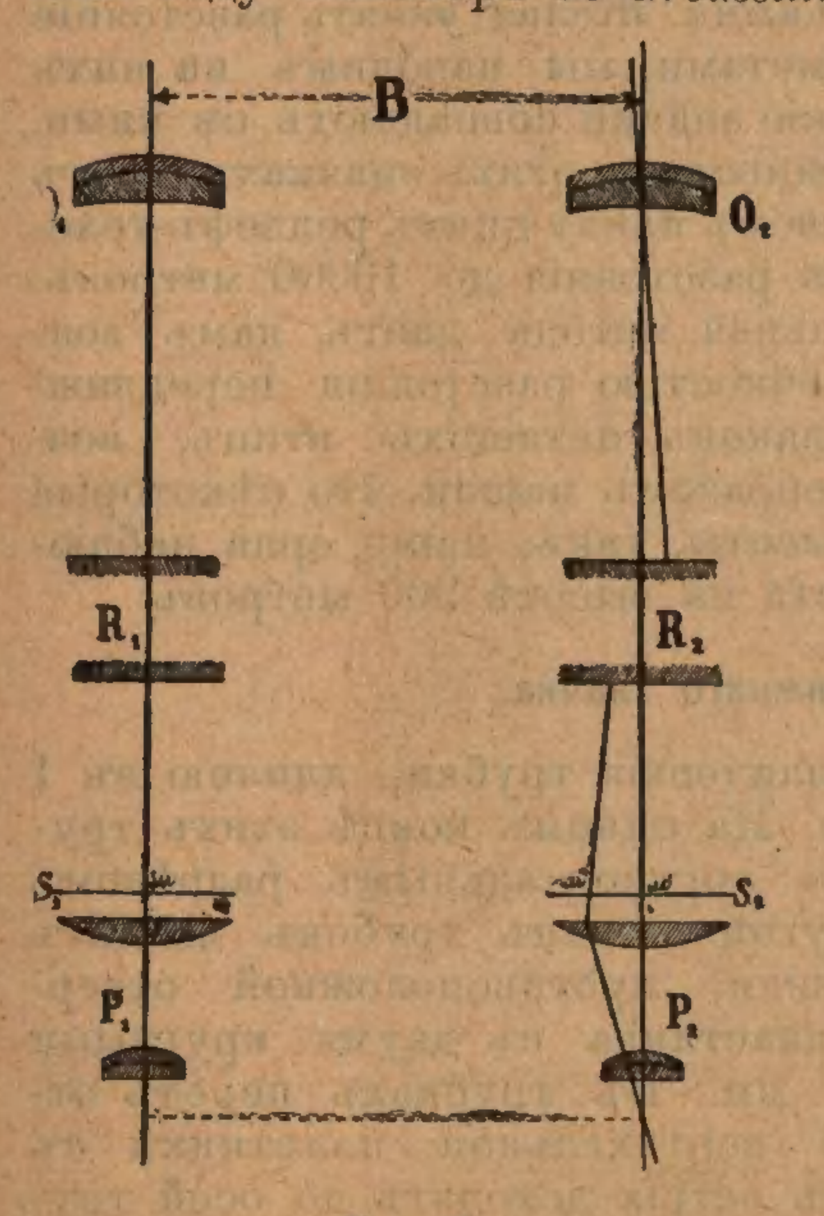
Рельефъ-телескопы, благодаря ихъ прекраснымъ стереоскопическимъ эффектамъ, чрезвычайно важны для военныхъ цѣлей. По мѣрѣ того, какъ орудійная техника все болѣе и болѣе усовершенствовалась, явилась потребность въ такихъ оптическихъ инструментахъ, которые давали бы возможность различать и также измѣрять разстоянія между предметами, находящимися на очень



Фиг. 6.
Ходъ лучей въ рельефъ-телескопѣ. Цейса.

большомъ разстояніи отъ наблюдателя. Рельефъ-телескопы удовлетворяютъ этимъ условіямъ, и потому они получили широкое распространеніе. Также для моряка они имѣютъ большое значеніе, давая ему возможность видѣть отдаленные берега и все находящееся на нихъ не въ одной плоскости, но пластично.

Особенное значеніе получили рельефъ-телескопы съ тѣхъ поръ, какъ ихъ начали примѣнять для измѣренія разстояній. Въ 1893 году инженеръ *de-Groussilliers* въ Шарлотенбургѣ сообщилъ фирмѣ Цейссъ свою идею относительно примѣненія рельефъ-телескопа въ качествѣ стереоскопическаго измѣрителя разстояній. Если помѣстить на оптическихъ осяхъ обѣихъ трубъ или въ другихъ соотвѣтствующихъ точкахъ обѣихъ фокусныхъ плоскостей значки, то, смотря въ телескопъ, мы получаемъ впечатлѣніе, будто мы видимъ одинъ значекъ, находящійся отъ насъ на безконечно-большомъ разстояніи; если же разстояніе значковъ меньше разстоянія объективовъ, то мы видимъ только одинъ, плавающій въ полѣ зрѣнія значекъ, котораго разстояніе обратно - пропорціонально разницѣ между разстояніями объективовъ и значковъ и можетъ быть легко вычислено съ помощью фокуснаго разстоянія.



Фиг. 7.

Вычисленіе положенія значковъ производится слѣдующимъ образомъ. Пусть будутъ на чертежѣ (7) O_1 и O_2 объективы двойного телескопа, S_1 и S_2 фокусныя плоскости и P окуляры. Си-

стема призмъ по Порро, служащая для оборачиванія изображеній и для сближенія осей обѣихъ трубъ до разстоянія глазъ, обозначена на чертежѣ черезъ R. Базисъ стереоскопическаго зрѣнія, т. е. разстояніе обоихъ объективовъ, обозначено буквой B.

Если оси обоихъ телескоповъ совершенно параллельны, то изображенія одной и той же безконечно-отдаленной точки падаютъ въ соотвѣтствующія точки обѣихъ фокусныхъ плоскостей; напримѣръ, въ M и M′. Совсѣмъ другія положенія имѣютъ изображенія предмета, находящагося на конечномъ разстояніи E. Положимъ, что изображеніе какой-нибудь точки этого предмета совпадаетъ въ плоскости S_1 съ M; тогда изображеніе той же точки въ плоскости S_2 совпадетъ не съ M′, но съ нѣкоторой другой точкой M″ той же плоскости. Разстояніе точки M″ отъ M′ вычисляется по формулѣ:

$$a = \frac{BF}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ B, F и E извѣстныя величины.

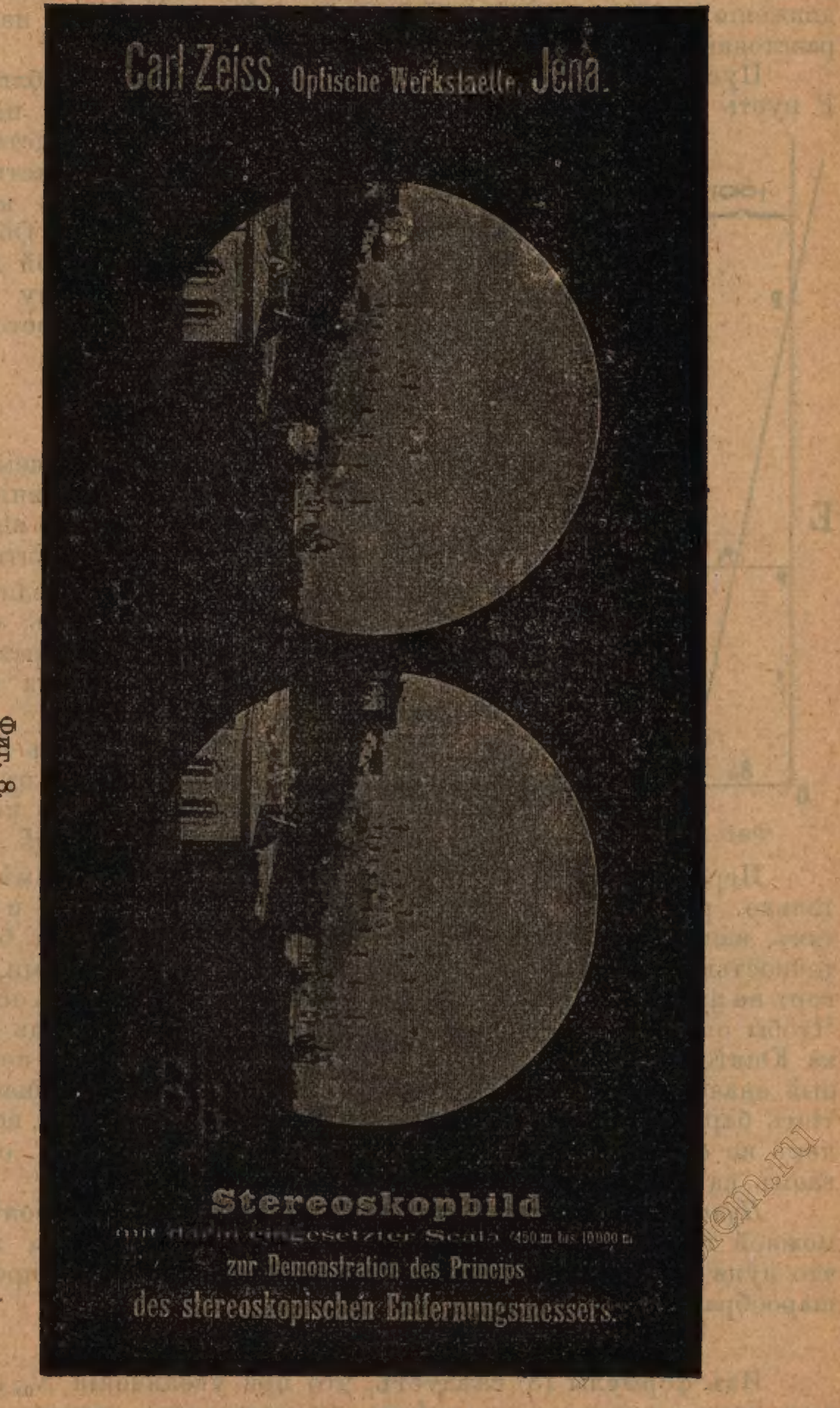
Пульфрихъ распредѣлилъ значки на трехъ прямыхъ, идущихъ подъ разными углами наклоненія въ глубину, и надписалъ надъ каждымъ изъ значковъ соотвѣтствующее разстояніе въ гектометрахъ (фиг. 8). Смотря въ рельефъ-телескопъ, мы получаемъ впечатлѣніе, будто мы видимъ предъ собою длинную улицу, на которой разставлены поверстные камни. Желая узнать разстояніе между какими-нибудь двумя предметами, мы наводимъ на нихъ рельефъ-телескопъ и смотримъ, какіе значки совпадаютъ съ ними. Разница между числами, обозначенными на этихъ значкахъ, даетъ намъ искомое разстояніе. Посредствомъ наилучшихъ рельефъ-телескоповъ мы въ состояніи измѣрять разстоянія до 10000 метровъ.

Стереоскопическая измѣрительная метода даетъ намъ возможность измѣрять съ большою точностью разстоянія передвижныхъ объектовъ,—какъ, напр., облаковъ, летящихъ птицъ, воздушныхъ шаровъ и т. д. Такимъ образомъ нашли, что нѣкоторыя птицы долетаютъ до громадной высоты, такъ, напр., орла наблюдали на высотѣ 2000 метровъ, аиста на высотѣ 900 метровъ.

Принципъ передвижнаго значка.

Пульфрихъ сложилъ двѣ металлическія трубки, длиною въ 1 метръ и съ діаметромъ въ 55 mm. На одномъ концѣ этихъ трубокъ онъ помѣстилъ пластинку съ горизонтальнымъ разрѣзомъ въ 2 мм. шириною для глазъ. Другой конецъ трубокъ входитъ въ ящикъ, у котораго вмѣсто стѣнки, противоположной отверстіямъ, помѣщена металлическая пластинка съ двумя круглыми отверстіями съ діаметромъ въ 40 мм. Въ трубкахъ передъ отверстіями находится по маленькой вертикальной пластинкѣ съ остріемъ. Эти пластинки, которыхъ острія доходятъ до осей трубокъ, могутъ передвигаться посредствомъ микрометрическаго винта. Когда мы черезъ трубки разсматриваемъ какой-нибудь ландшафтъ, то пластинки съ остріями кажутся намъ спроектиро-

ванными въ послѣдній. Измѣняя разстояніе пластинокъ другъ



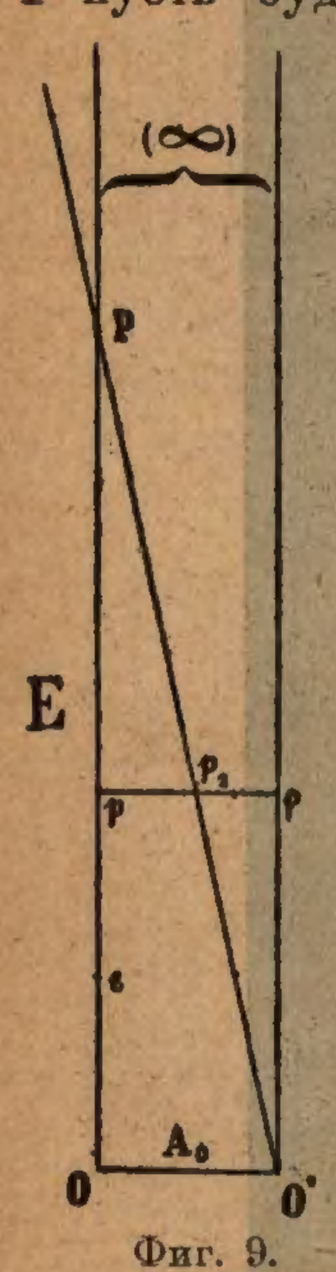
Фиг. 8.

отъ друга, мы получаемъ впечатлѣніе, будто ихъ разстояніе отъ

насъ измѣняется. Пластинки намъ кажутся удаляющимися при раздвиженіи ихъ и приближающимися при сближеніи. Это передвиженіе пластинокъ и можетъ служить мѣрой для измѣренія разстояній.

Пусть будутъ O и O′ мѣста глазъ (фиг. 9) наблюдателя, P пусть будетъ точка, разстояніе E которой отъ насъ мы желаемъ опредѣлить. OP и OP′ представляютъ собою глазныя оси. Мы помѣщаемъ пластинки съ остріями такимъ образомъ, чтобы онѣ казались намъ спроектированными въ точкѣ P. Обозначая разстояніе глазъ другъ отъ друга буквой A_0, разстояніе пластинокъ черезъ A и длину трубки черезъ e, мы имѣемъ для искомаго разстоянія:

$$E = \frac{A_0 e}{A_0 - A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$



Фиг. 9.

При данныхъ A_0 и e мы всегда можемъ опредѣлить искомое разстояніе, если разстояніе A извѣстно; это же послѣднее даетъ намъ непосредственно барабанъ микрометрическаго винта.

Изъ формулы (3) видно, что при увеличеніи A разстояніе E увеличивается и наоборотъ; оно дѣлается равнымъ безконечности, т. е. разсматриваемая точка кажется намъ находящеюся въ без конечности, если $A = A_0$.

Этотъ способъ измѣренія извѣстенъ подъ названіемъ: „*принципа передвижнаго значка*“ въ отличіе отъ „*принципа неподвижныхъ значковъ*“, о которомъ мы говорили въ предыдущемъ параграфѣ.

Передвижный значекъ даетъ намъ возможность измѣрять не только разстоянія между предметами на землѣ, но и внѣ ея; такъ, напр., мы въ состояніи безъ малѣйшаго труда и съ большою точностью измѣрять разстоянія между небесными тѣлами, высоту горъ на лунѣ и т. д. Измѣреніе производится слѣдующимъ образомъ. Чтобы опредѣлить, напримѣръ, разстояніе какого-нибудь спутника Юпитера отъ планеты, мы устраиваемъ такъ, чтобы передвижный значекъ совпалъ, положимъ, со спутникомъ и вращаемъ затѣмъ барабанъ микрометрическаго винта до тѣхъ поръ, пока значекъ не совпадетъ съ планетой; искомое разстояніе отсчитываемъ на барабанѣ.

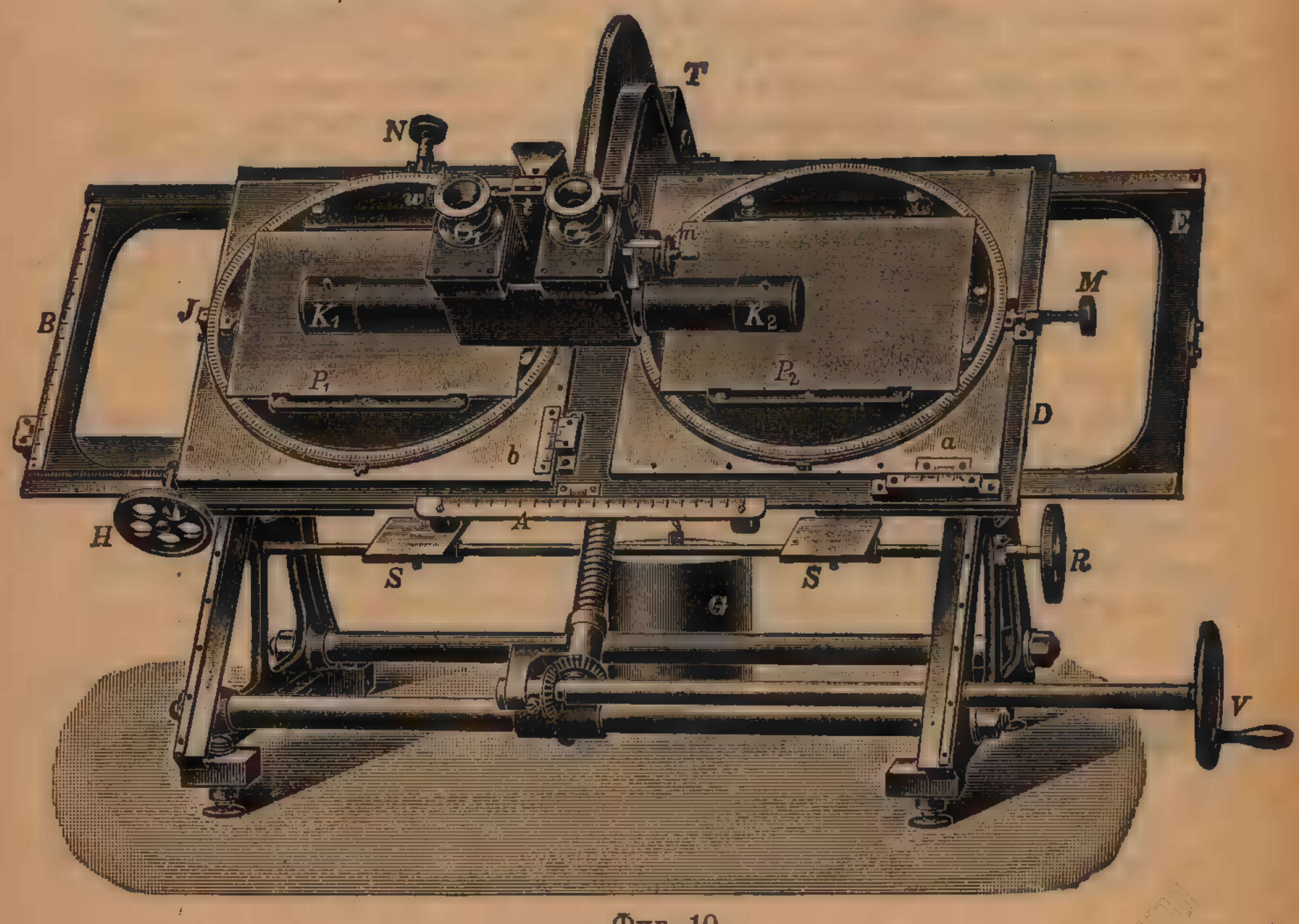
Пульфрихъ, опредѣливъ такимъ образомъ, съ наиболѣе возможной точностью, высоту цѣлой массы горъ на лунѣ, нашелъ, что луна не сплюснута у полюсовъ, какъ полагали прежде, а шарообразна.

Стерео-компараторъ.

Изъ формулы (3) слѣдуетъ, что при увеличеніи A_0, т. е. базиса стереоскопическаго зрѣнія, увеличивается также радіусъ стереоскопическаго поля E. Если A_0 приближается къ безконечно-

сти, то и E приближается къ тому же предѣлу. Еслибъ намъ, поэтому, какимъ-нибудь образомъ удалось расширить базисъ A_0, т. е. разстояніе между глазами, до безконечности, то мы и отъ безконечно-отдаленныхъ предметовъ въ состояніи были бы получать стереоскопическія впечатлѣнія.

Эту мысль удалось теперь реализировать слѣдующимъ образомъ: фотографируютъ какую-нибудь часть неба сегодня и полгода спустя; такимъ образомъ, мы разсматриваемъ извѣстную часть неба съ двухъ точекъ земной орбиты, расположенныхъ діаметрально противоположно другъ къ другу и находящихся, слѣдовательно, на разстояніи, равномъ двойному разстоянію солнца отъ земли; этимъ самымъ мы достигаемъ того, что разстояніе нашихъ глазъ расширено до 40 милліоновъ миль или, можно сказать, до безконечности.



Фиг. 10.
Стерео-компараторъ.

Для разсматриванія подобнаго рода стереоскопическихъ изображеній *Пульфрихомъ*, которому вся современная стереоскопія обязана своимъ развитіемъ, устроенъ, такъ называемый, *стереокомпораторъ*.

Фигура (10) представляетъ собою внѣшній видъ стерео-компоратора. Обѣ пластинки P_1 и P_2 лежатъ на нѣсколько наклонной рамкѣ D, которую можно передвигать по рамкѣ E слѣва направо

и наоборотъ. Это передвиженіе производится посредствомъ винта H. Для передвиженія рамки E вмѣстѣ съ рамкой D сверху внизъ служитъ рукоятка V. Надъ рамкой D находится стереоскопическій микроскопъ съ объективами при K_1 и K_2 и окулярами при O_1 и O_2. По своей конструкціи стереоскопическій микроскопъ похожъ на стереоскопическій измѣритель разстояній. Для освѣщенія пластинокъ служатъ два зеркала S_1, лежащія подъ рамкой D. Измѣреніе производится посредствомъ „передвижнаго значка", находящагося въ главной фокусной плоскости. Этотъ значекъ передвигаютъ микрометрически до тѣхъ поръ, пока онъ не кажется намъ находящимся на одинаковомъ разстояніи съ изслѣдуемымъ предметомъ.

Стерео-компораторъ имѣетъ, прежде всего, громадное значеніе въ астрономіи. По двумъ фотографическимъ снимкамъ, сдѣланнымъ въ разное время съ какой-нибудь части звѣзднаго неба, мы въ состояніи, съ помощью стерео-компоратора, съ легкостью вычислить паралаксы звѣздъ. Звѣзды съ одинаковымъ собственнымъ движеніемъ, перемѣнныя звѣзды и т. д. тотчасъ же обнаруживаются въ стерео-компараторѣ. Такимъ образомъ Wolf'у въ Гейдельбергѣ удалось открыть, при изслѣдованіи одной пластинки изъ области туманнаго пятна въ Оріонѣ, 10 новыхъ перемѣнныхъ звѣздъ. Самъ Пульфрихъ открылъ новый планетоидъ при изслѣдованіи фотографическихъ снимковъ съ Сатурна, сдѣланныхъ Wolf'омъ. Wolf далѣе употребляетъ компараторъ для систематизаціи маленькихъ туманныхъ пятенъ.

Не только въ астрономіи, но и во многихъ другихъ отрасляхъ науки и техники можно употребить компараторъ съ большою пользою; въ географіи, напримѣръ, онъ можетъ служить для обнаруживанія движенія глетчеровъ, измѣненія морскихъ береговъ; въ архитектурѣ—для обнаруживанія измѣненій, происходящихъ отъ поры до времени въ разныхъ постройкахъ и т. д.

Вычисленіе суммъ одинаковыхъ цѣлыхъ и положительныхъ степеней чиселъ натуральнаго ряда.

Е. Григорьева въ Казани.

Статья того же заглавія, помѣщенная въ №№ 110 и 111 „Вѣстн. Оп. Физ." и принадлежащая г. Зимину, при всей безукоризненности разсужденій, страдаетъ, на нашъ взглядъ, существеннымъ недостаткомъ—сложностью выкладокъ и малодоступностью въ мнемоническомъ отношеніи формъ тѣхъ выраженій, которыя почтенный авторъ ставитъ своей конечной цѣлью.

Между тѣмъ, элементарное изложеніе того же вопроса значительно облегчается и результаты принимаютъ весьма удобную

форму, если пользоваться, хотя бы въ самой ограниченной степени, методомъ сокращеннаго, или, какъ говорятъ, *символическаго* обозначенія, въ основаніи котораго лежитъ крайне простой принципъ.

Разсмотримъ тожество

$$(x+1+B)^m-(x+B)^m=[x+(B+1)]^m-(x+B)^m, \quad (1)$$

въ которомъ m — цѣлое положительное число, x — произвольное, а B — пока неопредѣленное, но конечное количество. Если обѣ части взятаго тожества развернуть по формулѣ Ньютона, то, очевидно, коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ B равны между собой; слѣдовательно, это тожество будетъ существовать и въ томъ случаѣ, если различныя степени B, B^2, B^3, ... замѣнить какими-нибудь числами B_1, B_2, B_3, ...

Условимся называть символическимъ выраженіемъ всякое выраженіе, въ которомъ показатели нѣкоторыхъ буквъ должны быть разсматриваемы, какъ индексы; въ нашемъ изложеніи роль такихъ буквъ будетъ играть буква B.

Равенство двухъ символическихъ выраженій будемъ называть символическимъ равенствомъ.

Разложивъ вторую часть нашего символическаго тожества по биному Ньютона и соединивъ члены съ одинаковыми степенями x, получимъ символическое выраженіе

$$mx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}\left[(B+1)^2-B^2\right]x^{m-2}+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\left[(B+1)^3-B^3\right]x^{m-3}+....+\left[(B+1)^m-B^m\right]. \quad (2)$$

Опредѣлимъ неопредѣленныя числа B_1, B_2, B_3, ... подъ тѣмъ условіемъ, чтобы были удовлетворены послѣдовательно символическія уравненія вида

$$(B+1)^k-B^k=0, \quad (3)$$

гдѣ k принимаетъ всевозможныя цѣлыя значенія, начиная съ $k=2,\ 3, \ldots$

Послѣ этого въ выраженіи (2) останется одинъ только первый членъ, и тожество (1) обратится въ

$$(x+1+B)^m-(x+B)^m=mx^{m-1}. \quad (4)$$

Это символическое тожество, въ которомъ, по раскрытіи скобокъ, слѣдуетъ показатели буквы B замѣнить соотвѣтственными индексами, позволяетъ вполнѣ и при томъ сравнительно просто рѣшить поставленную задачу.

Но прежде этого остановимся на вычисленіи значеній чиселъ B_1, B_2, B_3, ... и при этомъ убѣдимся, что условіе, принятое нами

относительно ихъ, выполнимо. Уравненіе (3), по освобожденіи его отъ символической формы, имѣетъ видъ:

$$kB_{k-1}+\frac{k(k-1)}{1.2}B_{k-2}+\cdots+kB_1+1=0$$

и совпадаетъ съ тѣмъ, которое привелъ г. Зиминъ на стр. 253.

Принимая въ этомъ рекуррентномъ соотношеніи $k=2, 3, \ldots,$ имѣемъ

$$2B_1+1=0$$

$$3B_2+3B_1+1=0$$

. . . .

. . . .,

откуда послѣдовательно находимъ

$$B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=0, \ldots.$$

Такимъ образомъ, увеличивая каждый разъ k на единицу, мы получаемъ новое уравненіе и, вмѣстѣ съ тѣмъ, вводимъ новое неизвѣстное число B, которое изъ него и вычисляется; нечего говорить о томъ, что процессъ этотъ можетъ продолжаться неопредѣленно, и найденныя такимъ способомъ числа B суть числа раціональныя и конечныя. Они въ первый разъ были введены въ науку знаменитымъ математикомъ Я. Бернулли (1654—1705) и въ честь его еще Моавромъ (1667—1754), указавшимъ соотношеніе (3), названы „числами Я. Бернули“ [1]).

Изложенный пріемъ неудобенъ тѣмъ, что для вычисленія какого-нибудь Бернулліева числа необходимо знать всѣ предшествующія числа. Существуютъ другіе способы и нѣсколько весьма общихъ формулъ, по которымъ вычисленіе любого Бернулліева числа выполняется независимо отъ другихъ такихъ чиселъ. Бернулліевы числа подчиняются многимъ любопытнымъ соотношеніямъ и имѣютъ важное значеніе во многихъ вопросахъ Анализа.

Тожество (4) можетъ доставить разнообразныя зависимости между числами Бернулли. Такъ, полагая въ немъ $x=-1$ и измѣняя m въ k, находимъ слѣдующее соотношеніе въ символической формѣ:

$$B^k-(B-1)^k=(-1)^{k-1}k.$$

Складывая его съ (3) и замѣняя k четнымъ числомъ $2n$, имѣемъ

$$(B+1)^{2n}-(B-1)^{2n}=-2n,$$

или, переходя отъ символическаго обозначенія къ обыкновенному,

---

[1]) Эти числа, если разсматривать ихъ абсолютныя значенія и не принимать во вниманіе нулей, сначала убываютъ, а потомъ, начиная съ $B_8=-\frac{1}{30}$, возрастаютъ и обращаются въ безконечность при безконечномъ значеніи индекса. Существуетъ таблица ихъ значеній, доведенная до B_{124}.

помня при этомъ значеніе $B_1 = -\frac{1}{2}$, получаемъ, если назвать ради краткости черезъ $(2n)_1$, $(2n)_2$, ... биноміальные коэффиціенты

$$(2n)_1 B_{2n-1} + (2n)_3 B_{2n-3} + \ldots + (2n)_3 B_3 = 0,$$

соотношеніе, содержащее Бернулліевы числа исключительно съ нечетными индексами; при помощи его, принимая послѣдовательно $n=2, 3, \ldots$, убѣждаемся, что всѣ Бернулліевы числа съ этими индексами, кромѣ $B_1 = -\frac{1}{2}$, суть нули.

Переходя теперь къ вопросу объ опредѣленіи суммъ одинаковыхъ степеней чиселъ натуральнаго ряда, мы составимъ рядъ тожествъ, замѣняя въ тожествѣ (4) x послѣдовательно черезъ $x+1$, $x+2, \ldots, x+n-1$, гдѣ n цѣлое положительное число, сложимъ ихъ и получимъ:

$$(x+n+B)^m - (x+B)^m = m[x^{m-1} + (x+1)^{m-1} + \ldots + (x+n-1)^{m-1}],$$

откуда, при $x=0$, имѣемъ

$$m[1^{m-1} + 2^{m-1} + \ldots + (n-1)^{m-1}] = (n+B)^m - B^m,$$

или, обозначивъ черезъ S_m сумму $m^{ыхъ}$ степеней чиселъ натуральнаго ряда отъ 1 до $(n-1)$ включительно, находимъ искомое выраженіе суммы S_{m-1} символическаго характера

$$S_{m-1} = \frac{(n+B)^m - B^m}{m}.$$

Такъ какъ тожество (4) существуетъ при всякомъ цѣломъ положительномъ $m > 1$, но и найденное сейчасъ выраженіе имѣетъ мѣсто при тѣхъ же значеніяхъ m. Если освободиться здѣсь отъ символической формы, то получится многочленъ m-ой степени, цѣлый относительно n. Этотъ многочленъ обыкновенно разсматривается и подвергается изученію при любомъ значеніи своего перемѣннаго, которое мы будемъ означать черезъ x, и носитъ названіе „функціи Я. Бернулли". Наиболѣе употребительное обозначеніе Бернулліевой функціи — это $\varphi(x)$ съ соотвѣтствующимъ индексомъ, такъ что

$$\varphi_{m-1}(x) = \frac{(x+B)^m - B^m}{m} \qquad (5)$$

или въ раскрытой формѣ

$$\varphi_{m-1}(x) = \frac{1}{m}\left[x^m + (m)_1 B_1 x^{m-1} + (m)_2 B_2 x^{m-2} + \ldots + (m)_1 B_{m-1} x\right], \qquad (6)$$

гдѣ $(m)_1$, $(m)_2$, ... биноміальные коэффиціенты.

Соотвѣтственно различнымъ значеніямъ индекса получаются Бернулліевы функціи $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... различныхъ порядковъ.

Характернымъ свойствомъ этихъ функцій, какъ слѣдуетъ

изъ предыдущаго, является то, что для цѣлаго значенія перемѣннаго $x=n$, онѣ даютъ суммы одинаковыхъ степеней натуральныхъ чиселъ отъ 1 до $(n-1)$ включительно, т. е. $\varphi_m(n)=S_m$ [1]).

Изъ выраженія (6) непосредственно заключаемъ, что $\varphi_{m-1}(x)$ представляетъ цѣлый относительно x многочленъ m-ой степени, не содержащій члена свободнаго отъ x, т. е. обращающійся въ нуль вмѣстѣ съ x; точно также легко видѣть, что Бернулліева функція нечетнаго порядка $\varphi_{2k-1}(x)$ при $k>1$ не содержитъ и члена съ первой степенью x, ибо коэффиціентомъ этого члена при $m=2k$ служитъ Бернулліево число $B_{2k-1}=0$.

Составивъ по равенству (5) выраженіе для $\varphi_{m-1}(x+1)$ и вычитая отсюда $\varphi_{m-1}(x)$, находимъ:

$$\varphi_{m-1}(x+1)-\varphi_{m-1}(x)=\frac{1}{m}\Big[(x+1+B)^m-(x+B)^m\Big],$$

или, принимая во вниманіе тожество (4), замѣнивъ послѣ этого m на $m+1$, имѣемъ

$$\varphi_m(x+1)-\varphi_m(x)=x^m,$$

свойство Бернулліевыхъ функцій, очевидное для случая x цѣлаго и положительнаго.

Это соотношеніе, сопровождаемое извѣстнымъ уже намъ условіемъ $\varphi_m(0)=0$, можетъ быть принято за опредѣленіе Бернулліевыхъ функцій и допускаетъ установить полную ихъ теорію [2]). Частными случаями того же соотношенія и условія $\varphi_m(0)=0$ являются значенія $\varphi_m(1)=0$ и $\varphi_m(2)=1$.

Предлагаемъ читателю доказать, что Бернулліевы функціи четныхъ порядковъ обращаются въ нуль также и при $x=\frac{1}{2}$, замѣтивъ только, что такое ихъ свойство представляетъ прямое слѣдствіе другого любопытнаго соотношенія

$$\varphi_m(1-x)=(-1)^{m-1}\varphi_m(x).$$

Послѣ всего этого можно считать доказаннымъ, что Бернулліевы функціи нечетнаго порядка (выше перваго) дѣлятся на

---

[1]) Мы приписываемъ символамъ S_m иное значеніе, чѣмъ г. Зиминъ; такое обозначеніе, удобное уже потому, что доставляетъ столь сжатую формулу (5), является въ то же время установившимся въ теоріи Бернулліевыхъ функцій. Выраженіе (6) не будетъ отличаться отъ формулы г. Зимина, данной [redacted] стр. 256, если измѣнить въ немъ m на $m+1$, прибавить, вслѣдствіе разницы въ обозначеніяхъ, членъ x^m (для чего достаточно вмѣсто B_1 написать $\frac{1}{2}$) и отбросить члены, содержащіе Бернулліевы числа съ нечетными индексами.

[2]) См. Н. Я. Сонинъ „О Бернулліевыхъ полиномахъ и ихъ приложеніяхъ" (Варш. Универс. Изв. 1888 г. №№ 3 и 4).

$x^2(x-1)$, а четнаго порядка—на $x(x-1)(2x-1)$, примѣромъ чего служатъ извѣстныя значенія суммъ квадратовъ [redacted] кубовъ чиселъ натуральнаго ряда.

Въ заключеніе остается указать еще одно свойство Бернулліевыхъ функцій, служившее академику В. Г. Имшенецкому исходнымъ пунктомъ изложенія ихъ теоріи [1]) и приведенное также въ статьѣ г. Зимина; оно даетъ возможность, имѣя выраженіе для функціи $\varphi_{m-1}(x)$, составить выраженіе для $\varphi_m(x)$; мы найдемъ законъ составленія, если сравнимъ многочленъ, стоящій въ скобкахъ равенства (6), съ тѣмъ, который получимъ изъ того же равенства замѣной m на $m+1$:

$$\varphi_m(x)=\frac{1}{m+1}\left[x^{m+1}+(m+1)_1 B_1 x^m+(m+1)_2 B_2 x^{m-1}+\cdots+(m+1)_1 B_m x\right];$$

такимъ образомъ образомъ убѣждаемся, что второй изъ этихъ многочленовъ можетъ быть составленъ по первому, если этотъ послѣдній умножить на x и на $m+1$, а въ полученномъ выраженіи каждый коэффиціентъ раздѣлить на соотвѣтствующаго ему показателя при x; сюда придется прибавить еще новый членъ $(m+1)_1 B_m x$, коэффиціентъ котораго, Бернулліево число B_m, можетъ быть опредѣленъ извѣстнымъ уже намъ способомъ или, оставленный пока неопредѣленнымъ, вычисленъ при помощи какого-нибудь частнаго значенія перемѣннаго x.

Присоединяемъ здѣсь небольшую таблицу значеній Бернулліевыхъ чиселъ:

$B_1=-\frac{1}{2}$	$B_8=-\frac{1}{30}$	$B_{16}=-\frac{3617}{510}$
$B_2=\frac{1}{6}$	$B_{10}=\frac{5}{66}$	$B_{18}=\frac{43867}{798}$
$B_4=-\frac{1}{30}$	$B_{12}=-\frac{691}{2730}$	$B_{20}=-\frac{174611}{330}$
$B_6=\frac{1}{42}$	$B_{14}=\frac{7}{6}$	$B_{22}=\frac{854513}{138}$.

Казань, 1903 г., январь.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Скорость распространенія рентгеновскихъ лучей. Согласно сообщенію въ „Comptes Rendus“ Blondlot, удалось опредѣлить скорость распространенія X-лучей. Мы помѣстимъ въ непродолжительномъ

---

[1]) „О функціи Я. Бернулли [redacted] выраженіи разности между одноопредѣльною суммою и интеграломъ“ (Уч. Зап. Каз. Унив. 1870 г.).

времени болѣе подробный рефератъ объ этой работѣ. Покамѣстъ обратимъ лишь вниманіе на тотъ знаменательный фактъ, что скорость оказалась такая же, какъ и скорость распространенія свѣтовыхъ колебаній.

Медаль имени Abel'я. По случаю юбилея N. H. Abel'я королемъ Швеціи и Норвегіи учреждена золотая медаль, стоимостью въ 1000 кронъ, которая будетъ выдаваться каждыя пять лѣтъ. Право предложенія кандидатовъ предоставлено Ученому Обществу въ Христіаніи. Медаль будетъ выдаваться за лучшія работы въ области чистой математики, опубликованныя за послѣднее пятилѣтіе, и при томъ безъ различія національности.

Юбилей J. Bolyai. Клаузенбургскій Университетъ праздновалъ 15-го января (н. ст.) 1903 г. 100-лѣтній юбилей со дня рожденія питомца своего Johann'a Bolyai, который, какъ извѣстно, почти одновременно съ Н. И. Лобачевскимъ построилъ систему *неевклидовой геометріи.* На торжественномъ засѣданіи сообщено было, между прочимъ, объ изданіи по поводу юбилея сборника на латинскомъ языкѣ, который будетъ разосланъ Академіямъ Наукъ всего міра. Далѣе, учреждена интернаціональная премія имени Bolyai'я въ 10000 кронъ, которая будетъ выдаваться разъ въ пять лѣтъ (первый разъ въ 1905 году). Присужденіе преміи будетъ происходить въ декабрьскомъ засѣданіи Венгерской Академіи Наукъ по предложенію жюри, состоящаго изъ двухъ дѣйствительныхъ членовъ Академіи и двухъ членовъ-корреспондентовъ.—По поводу юбилея Клаузенбургскій Университетъ избралъ H. Poincaré *Doctor'омъ honoris causa.*

Новая біографія H. v. Helmholtz'a. Недавно вышелъ въ свѣтъ первый томъ обширной біографіи H. v. Helmholtz'a, составленный ученикомъ и товарищемъ его, профессоромъ математики Гейдельбергскаго Университета Leo Königsberger'омъ *). Біографія доведена въ этомъ томѣ до 1871-го года, когда Helmholtz былъ профессоромъ физіологіи въ Гейдельбергѣ и готовился жениться второй разъ. Она содержитъ много интереснаго о жизни великаго физика; между прочимъ, цѣлый рядъ неизданныхъ до сихъ поръ писемъ. Къ роскошно выполненному изданію приложены три портрета Helmholtz'a: 1) v. Helmholtz по портрету, исполненному въ 1876 году художникомъ Lehnbach'омъ, 2) Helmholtz по дагерротипу 1848-го года, принадлежавшему Emil'ю du Bois-Reymond'y, 3) Helmholtz по англійской гравюрѣ на мѣди отъ 1867 года.

Историческая справка о Poggendorff'ѣ. Какъ извѣстно, Poggendorff, редакторъ журнала *„Annalen der Physik und Chemie"* (теперь *„Annalen der Physik"* подъ редакціей Drude) не принялъ статьи

*) Leo Königsberger, *„H. v. Helmholtz"*; Bd. I, (XII+375 p., mit 3 Bildnissen); Braunschweig, 1902, Vieweg & Sohn.; M. 8, in Leinw. M. 10, Halbfr. M. 12.

Julius Robert Mayer'а, въ которой впервые ясно формулированъ былъ законъ сохраненія энергіи. Та же участь постигла и статью Helmholtz'а, посвященную тому же предмету. Теперь оказывается, что также безъ всякаго основанія не была принята Poggendorff'омъ статья Philipp'а Reis'а, содержавшая описаніе изобрѣтеннаго имъ перваго телефона. *(Hoffmann's Zeitschrift).*

Дневникъ Gauss'а *). Дневникъ Gauss'а, который, какъ было сообщено въ № 333 настоящаго журнала, былъ изданъ F. Klein'омъ по поводу 150-лѣтняго юбилея Гёттингенскаго Ученаго Общества,—будетъ отпечатанъ также въ 57-омъ томѣ журнала Mathematische Annalen (Heft 1).

Новый пишущій телеграфъ. Около 5-ти лѣтъ тому назадъ У. Іетманъ, телеграфистъ на Западной жел. дор. въ Сѣв. Амер. Соед. Шт., изобрѣлъ простое приспособленіе, которое даетъ возможность передавать вполнѣ правильно телеграммы, работая на клавіатурѣ пишущей машины, какъ при обыкновенной перепискѣ. Теперь Іетманъ вошелъ въ соглашеніе съ компаніею пишущихъ машинъ Ремингтонъ (въ Илліонѣ) для эксплоатаціи этого изобрѣтенія, которое онъ еще болѣе усовершенствовалъ. Его машина состоитъ изъ комбинаціи пишущей машины съ телеграфнымъ аппаратомъ. Этотъ послѣдній устроенъ такимъ образомъ, что, если онъ ударитъ по клавишу клавіатуры, то онъ вполнѣ точно передаетъ соотвѣтственный знакъ алфавита Морзе. Машина соединена короткими проводниками съ линейнымъ проводомъ. Это изобрѣтеніе было испытано какъ на большихъ, такъ и на короткихъ разстояніяхъ и дало безукоризненные результаты. Союзъ печати въ Сѣв. Америкѣ приступилъ къ оборудованію этими аппаратами всѣхъ своихъ станцій. Къ сожалѣнію, источникъ, откуда заимствована эта замѣтка, не даетъ болѣе подробныхъ свѣдѣній объ этомъ интересномъ изобрѣтеніи.

(„Электротехникъ“).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Назначеніе Kukuchi. Профессоръ математики Kukuchi въ Токіо назначенъ японскимъ министромъ народнаго просвѣщенія.

† Stokes. 2-го февраля (н. ст.) 1903 года скончался въ Лондонѣ сэръ G. G. Stokes на 84-омъ году жизни. О его научной дѣятельности мы сообщимъ болѣе подробныя свѣдѣнія.

*) См. № 333 „Вѣстника“, стран. 208—209.

РЕЦЕНЗІИ.

„Сборникъ задачъ по элементарной физикѣ“ (курсъ среднихъ учебныхъ заведеній). Составилъ **Р. Д. Пономаревъ**, препод. Харьковскаго Реальнаго училища. Цѣна 1 руб.

Въ предисловіи къ этому „Сборнику“ авторъ, между прочимъ, указываетъ на то, что есть много противниковъ рѣшенія задачъ по физикѣ. Присоединяясь всецѣло къ мнѣнію автора о важности рѣшенія задачъ по физикѣ, мы можемъ лишь пожалѣть, что далеко не всѣ преподаватели физики обращаютъ должное вниманіе на это важное учебное пособіе при прохожденіи физики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ. Если рѣшеніе задачъ, вообще, содѣйствуетъ лучшему уразумѣнію и укрѣпленію въ памяти основъ изучаемой теоріи, то почему же лишать физику этого учебнаго средства? Съ другой стороны, если рѣшеніе задачъ, вообще, является еще и прекраснымъ воспитательнымъ средствомъ, вызывающемъ сообразительность, самодѣятельность и интересъ къ наукѣ въ учащемся, то почему же не внести въ содержаніе задачъ разнообразный и интересный матеріалъ, поставляемый физикой? Повторяемъ,—крайне жалѣемъ, что рѣшеніе задачъ по физикѣ остается въ пренебреженіи. Въ этомъ мы усматриваемъ одну изъ причинъ слабаго знанія этого важнаго предмета средняго образованія.

Обращаясь теперь къ вышеназванному сборнику, мы съ удовольствіемъ отмѣчаемъ полноту и разнообразіе его содержанія. Ни одинъ отдѣлъ физики не оставленъ составителемъ безъ вниманія; въ этомъ отношеніи онъ выгодно выдѣляется изъ существующихъ сборниковъ. Есть въ „Сборникѣ“ не мало интересныхъ задачъ, особенно, въ „Звукѣ“, „Свѣтѣ“ и „Механикѣ“.

Мы считаемъ, однако, нѣкоторыя задачи лишними: таковы упражненія въ употребленіи мѣръ метрической системы, въ переводѣ показаній термометровъ, задачи на равномѣрное движеніе. Точно также можно было бы выбросить нѣкоторыя изъ повторяющихся и при томъ легкихъ задачъ на другіе отдѣлы физики. (Такихъ задачъ не мало въ „теплотѣ“ и „электричествѣ“). Взамѣнъ этого мы бы рекомендовали помѣстить нѣсколько задачъ съ русскими мѣрами (напр., на формулу $m=v.d$), чѣмъ особенно были бы подчеркнуты преимущества метрической системы мѣръ и смыслъ коэффиціентовъ пропорціональности.

Мы также рекомендовали бы помѣстить въ началѣ каждаго отдѣла (въ особенности, въ „теплотѣ“) справочныя таблички; этимъ учащійся былъ бы поставленъ въ необходимость подумать надъ тѣмъ, чего—какого даннаго—недостаетъ ему для рѣшенія той или иной задачи и какъ себѣ помочь въ этомъ. Такія справочныя таблицы, сверхъ того, сократили бы условія задачъ и, слѣдовательно, объемъ книжки.

Было бы также желательно внести больше геометрическаго матеріала въ задачи на нѣкоторые отдѣлы (напр., на „Гидростатику").

Рекомендуемъ этотъ „Сборникъ" вниманію преподавателей физики и желаемъ ему самаго широкаго распространенія.

М. И.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 298 (4 сер.). Даны окружность O и точка A. Провести хорду xy этой окружности такъ, чтобы 1) площадь треугольника xAy и длина xy имѣли данное значеніе, или такъ, 2) чтобы площадь треугольника xAy и уголъ xAy имѣли данныя значенія.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 299 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x^6+x^3z^3+y^3z=0,$$

$$y^6+y^3z^3+x^3z=0,$$

$$x+y+z=0.$$

Евг. Григорьевъ (Казань).

№ 300 (4 сер.). Доказать, что число N не можетъ быть точной четвертой степенью, если $N-5$ дѣлится безъ остатка на 9.

(Заимств.).

№ 301 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=n\operatorname{tg}3x.$$

(Заимств.).

№ 302 (4 сер.). Число N имѣетъ видъ $a^\alpha b^\beta c^\gamma$, гдѣ a, b, c—простыя, а α, β, γ—цѣлыя числа. Опредѣлить N, зная, 1) что число всѣхъ дѣлителей числа N равно 24; 2) что α, β, γ суть послѣдовательныя цѣлыя числа, при чемъ $\alpha<\beta<\gamma$: 3) что b и c также послѣдовательныя числа и $b>c$; 4) что a^α, b^β, c^γ тоже послѣдовательныя цѣлыя числа и $a^\alpha<c^\gamma<b^\beta$.

(Заимств.).

№ 303 (4 сер.). Продавецъ отвѣсилъ покупателю дважды одно и то же, какъ ему казалось, количество товара; но вѣсы его были невѣрны. Кто изъ двухъ, продавецъ или покупатиль, потерялъ при этомъ, если извѣстно, что во второй разъ товаръ и гиря были положены на иныхъ чашкахъ, нежели въ первый разъ?

Л. Ямпольскій (Braunschweig).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 220 (4 сер.). *На данномъ отрѣзкѣ* BC *построенъ треугольникъ* BAC *съ угломъ* A *при вершинѣ. На сторонахъ* BA *и* CA *взяты точки* E *и* F *такъ, что отрѣзки* BF *и* CE *равны данной длинѣ* a. *Опредѣлить геометрическое мѣсто центра тяжести перемѣннаго треугольника* DEF, *гдѣ* D—*средина* BC.

Пусть K—средина отрѣзка FE. Построивъ параллелограммы $BFKM$ и $KECN$ и соединивъ точку D прямыми съ точками M и N, находимъ: $BM \mathrel{\#} FK$, $CN \mathrel{\#} KE$, откуда вытекаетъ, что $BM \mathrel{\#} KE$. Слѣдовательно стороны BM, BD и уголъ MBD треугольника MBD равны соотвѣтственно сторонамъ CN, CD и углу NCD треугольника NCD; поэтому треугольники MBD и NCD равны, а потому $MD=DN$, $\angle MDB=\angle NDC$. Изъ послѣдняго равенства, принимая во вниманіе взаимное положеніе угловъ MBD и NDC, слѣдуетъ, что точки M, D и N лежатъ на одной прямой. Итакъ, KD есть медіана треугольника MKN, въ которомъ $\angle MKN = \angle A$ *), такъ какъ $MK \| BA$ и $KN \| CA$,—и $KM=KN$, такъ какъ $KM=BF=EC=KN=a$. Итакъ, KD есть медіана, а слѣдовательно и высота равнобедреннаго треугольника съ угломъ A *) при вершинѣ и съ боковою стороною a. Поэтому $KD=a\cos\frac{A}{2}$, т. е. KD есть величина постоянная. Но KD есть также медіана треугольника $DFE(FK=KE)$; поэтому, называя центръ тяжести этого треугольника черезъ G, найдемъ $DG=\frac{2}{3}KD=\frac{2}{3}a\cos\frac{A}{2}$, т. е. геометрическое мѣсто точки G есть окружность, описанная изъ D радіусомъ $\frac{2}{3}a\cos\frac{A}{2}$ **).

Н. С. (Одесса).

№ 222 (4 сер.). *Пусть* $\frac{a}{x}$ *и* $\frac{b}{y}$ *суть двѣ послѣдовательныя подходящія непрерывной дроби. Показать, что дроби*

$$\frac{a^2+x^2}{ab+xy} \text{ и } \frac{a^2-x^2}{ab-xy}$$

несократимы.

Предположимъ, что дробь $\frac{a^2+x^2}{ab+xy}$ сократима, и потому числа a^2+x^2 и $ab+xy$ имѣютъ общимъ дѣлителемъ нѣкоторое простое число p, неравное 1. Тогда и число

$$(a^2+x^2)y^2-(ab+xy)xy=a^2y^2-abxy=ay(ay-bx) \qquad (2)$$

дѣлится на p. Но, по свойству подходящихъ дробей, абсолютная величина числа $ay-bx$ равна 1; слѣдовательно (см. (2)), ay дѣлится на p.

Итакъ, числа

$$ay,\quad a^2+x^2,\quad ab+xy \qquad (3)$$

дѣлятся на p. Предположимъ, что a дѣлится на p; тогда $a^2+x^2-a^2$, т. е. x^2, (см. (3)) также дѣлится на p, а потому, по извѣстной теоремѣ, само число x

---

*) Собственно $\angle MKN$ равенъ или $\angle A$, или $180^\circ-\angle A$. Детальное изслѣдованіе показываетъ, что первое значеніе угла MKN отвѣчаетъ случаю, когда отрѣзки BF и CE либо оба направлены по сторонамъ BA и CA треугольника ABC, либо оба — по ихъ продолженію; если же одинъ отрѣзокъ направленъ по сторонѣ, а другой по продолженію другой изъ двухъ сторонъ BA и CA, то надо взять второе значеніе.

**) Согласно съ предыдущей выноской, распространяя построеніе на всевозможные случаи, мы получимъ собственно двѣ концентрическія окружности радіусовъ $\frac{2}{3}a\cos\frac{A}{2}$ и $\frac{2}{3}a\sin\frac{A}{2}$.

дѣлится на p. Но тогда подходящая дробь $\frac{a}{x}$ оказалась бы сократимою, что невозможно. Если же a не дѣлится на p, то y должно дѣлится на p, такъ какъ (см. (3)) ay дѣлится на p; но тогда и $ab+xy-xy$, т. е. ab, (см. (3)) дѣлится на p, а потому и b дѣлится на p въ виду того, что a, по предположенію, не дѣлится на p. Итакъ, если a не дѣлится на p, то оба члена подходящей дроби $\frac{b}{y}$ дѣлятся на p, что невозможно.

Значитъ, ни въ какомъ случаѣ нельзя допустить, что дробь $\frac{a^2+x^2}{ab+xy}$ сократима.

Пользуясь тожествомъ

$$(a^2-x^2)y^2-(ab-xy)xy=ay(ay-bx)=\pm ay$$

и разсматривая рядъ чиселъ

$$ay,\quad a^2-x^2,\quad ab-xy,$$

послѣ ряда разсужденій, аналогичныхъ вышеприведеннымъ, мы убѣдимся, что дробь $\frac{a^2-x^2}{ab-xy}$ также несократима.

Н. С. (Одесса).

№ 223 (4 сер.). *Рѣшить въ раціональныхъ числахъ относительно* x *и* y *уравненіе*

$$ax^2-by^2=2ay,$$

гдѣ a *и* b *суть данныя раціональныя числа.*

Пусть x и y суть числа раціональныя. Тогда изъ предложеннаго уравненія найдемъ:

$$y\frac{(by+2a)}{a}=x^2 \quad (1).$$

Пусть $y\neq 0$. Раздѣливъ обѣ части равенства (1) на y^2, находимъ:

$$\frac{by+2a}{ay}=\frac{x^2}{y^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^2,$$

или, называя черезъ α *раціональное* число $\frac{x}{y}$, —

$$\frac{by+2a}{ay}=\alpha^2,$$

откуда слѣдуетъ, что y *необходимо* имѣетъ видъ

$$y=\frac{2a}{a\alpha^2-b} \quad (2),$$

гдѣ α — число раціональное. Подставивъ (см. (2)) найденное значеніе y въ равенство (1), находимъ:

$$x^2=\left(\frac{2a\alpha}{a\alpha^2-b}\right)^2,$$

$$x=\pm\frac{2a\alpha}{a\alpha^2-b} \quad (3).$$

Если же $y=0$, то (см. (1)) и $x=0$. Откуда слѣдуетъ, что формулы (2) и (3) вмѣстѣ съ рѣшеніемъ $x=y=0$ представляютъ собою совокупность всѣхъ возможныхъ рѣшеній, если подъ α подразумѣвать всевозможныя раціональныя числа.

Н. Готлибъ (Митава); *М. Виторгонъ* (Казань).

№ 249 (4 сер.). *Маятникъ длиной въ 50 сантиметровъ сдѣлалъ 4 качанія, пока совершилось паденіе тѣла, выпущеннаго безъ начальной скорости, на землю. Найти высоту, съ которой упало тѣло.*

Пусть g—ускореніе силы тяжести въ мѣстѣ наблюденія, t—время колебанія маятника, t'—время паденія, h—высота паденія тѣла. Тогда

$$t=\pi\sqrt{\frac{50}{g}},\quad t'=4t=4\pi\sqrt{\frac{50}{g}}\quad (1),\quad h=\frac{gt'^2}{2},$$

или (см. 1)

$$h=\frac{16g\pi^2.50}{g.2}=400\pi^2=3{,}14^2.400=3943{,}84.$$

Итакъ, $h=3943{,}84$ сантим. $=39{,}4384$ метра.

И. Плотникъ (Одесса); *Л. Ямпольскій* (Braunschweig); *Х. Вовси* (Двинскъ); *П. Грицынъ* (ст. Цымлянская); *Г. Огановъ* (Эривань); *А. Яковкинъ* (Екатеринбургъ).

№ 255 (4 сер.). *Тѣло свободно падаетъ безъ начальной скорости изъ нѣкоторой точки* A. *Въ моментъ начала паденія этого тѣла изъ точки* B, *расположенной на одной вертикали съ точкой* A, *ниже ея на* 80 *метровъ, бросаютъ снизу вверхъ другое тѣло.*

Опредѣлить начальную скорость второго тѣла, зная, что встрѣча обоихъ тѣлъ происходитъ въ моментъ остановки поднимающагося тѣла, и принимая ускореніе силы тяжести g *равнымъ* 9,8 *метра.*

Пусть x—начальная скорость въ метрахъ второго тѣла, t—время поднятія второго тѣла въ секундахъ. Въ моментъ остановки скорость второго тѣла, выражаясь общей формулой $x-gt$, равна въ то же время нулю. Поэтому

$$x-gt=0\quad (1).$$

За время t первое тѣло прошло (внизъ) $\frac{gt^2}{2}$ метровъ, а второе (вверхъ) $xt-\frac{gt^2}{2}$. По условію,

$$\frac{gt^2}{2}+xt-\frac{gt^2}{2}=80,\quad xt=80,$$

или (см. (1))

$$\frac{x^2}{g}=80,\quad x=\sqrt{80.g}=\sqrt{80.9{,}8}=\sqrt{16.49}=4.7=28.$$

Итакъ, $x=28$ метровъ.

И. Плотникъ (Одесса); *Л. Ямпольскій* (Braunschweig); *И. Коровинъ* (Екатеринбургъ); *Масковъ* (Казань); *Х. Вовси* (Двинскъ); *Г. Огановъ* (Эривань); *А. Яковкинъ* (Екатеринбургъ); *П. Грицынъ* (ст. Цымлянская).

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 12-го Февраля 1903 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.